Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. y Nat., Buenos Aires, Argentina, tomo 50, 1998.

ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DE FLUJOS A PARTIR DE SEÑALES TEMPORALES

Bernardo G. Mindlin

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, U.B.A.
Ciudad Universitaria, Pabellón I, (1428) Buenos Aires, Argentina.

Resumen

En este trabajo resumimos la aproximación topológica al análisis de datos caóticos, e indicamos posibles caminos hacia la extensión de estas técnicas hacia problemas en los cuales el flujo responsable de la dinámica caótica en observación necesite ser reconstruído en más de tres dimensiones.

Abstract

In this work we briefly report the topological approach to chaotic time series data analysis, and outline possible ways to extend those techniques to problems in which the underlying flow responsible for the observed chaotic dynamics requires to be embedded in a dimensionality higher than three.

Algunos de los resultados obtenidos por los dinamicistas en los últimos veinte años han tenido un impacto profundo en las ciencias naturales. En particular, éste ha sido el caso de la idea de que reglas determinísticas simples dan lugar a comportamientos complejos, impredecibles en el largo plazo (caos). Así, uno encuentra dos problemas principales al enfrentar un problema caótico: cómo descubrir la regla determinística sencilla mencionada antes y, una vez persuadidos de lograr este punto, cómo validarla a partir de los datos [Abarbanel 1993, Abarbanel 1996].

En los últimos años, hemos propuesto, junto a una serie de colaboradores, un modo de analizar datos que apunta a describir la estructura topológica de flujos caóticos. Para sistemas sumergibles en tres dimensiones (esto es, cuando el espacio de fases es de dimensión tres), este método nos llevó a clasificar atractores extraños en términos del modo en que las órbitas inestables coexistentes con el atractor extraño se anudaban y enroscaban entre sí. Así, segmentos de un atractor extraño que fueran asimilables a aproximaciones de órbitas inestables eran tomados como trayectorias casi cerradas en el espacio de fases. Cuantificando mediante invariantes

Acto realizado con motivo de la entrega del premio "Ernesto E. Galloni" -instituido por la familia Galloni- en Fisicomatemática, el 21 de noviembre de 1997.

toplógicos la estructura de dichos segmentos, es posible identificar si un conjunto dado de órbitas son compatibles con algún mecanismo capaz de producir soluciones caóticas [Mindlin 1990, Mindlin 1991]. El resultado final de dicho procedimiento consiste, entonces, en develar dicho mecanismo, típicamente mediante la identificación del templado o sostenedor de nudos capaz de sostener a todas las órbitas periódicas de dicho mecanismo [Birman 1983]. Numerosos casos experimentales han sido analizados desde esta perspectiva en los últimos años.

Pese a estos logros, la aplicabilidad del método está restringida por a) la dimensionalidad del espacio de fases en el cual la dinámica se lleva a cabo y b) la posibilidad de reconstruir buenas aproximaciones a órbitas periódicas inestables coexistentes con el atractor extraño bajo estudio (lo cual requiere series temporales largas y poco contaminadas por el ruido). Para superar estas dificultades, se ha propuesto caracterizar a los flujos caóticos mediante otros invariantes toplógicos [Muldoon 1993, Sciamarella 1999]. En este trabajo construímos sobre esfuerzos previos con el fin de mostrar cómo es posible aproximar la variedad invariante visitada por una trayectoria compleja mediante una descomposición en bloques. Luego, mostramos cómo es posible manipular algoritmicamente las prescripciones necesarias para ensamblarlos. De este modo, logramos la descripción de un complejo (complex): una suerte de esqueleto del atractor en estudio vía su descripción simplicial. El resultado de este procedimiento permite obtener tanto una cuantificación como una visualización intuitiva de los procesos de estiramiento y compresión característicos de los mecanismos responsables del comportamiento complejo [Sciamarella 1999].

Los resultados presentados aquí ilustran este mecanismo mediante una aplicación al problema de la voz humana (esto es, del análisis de la señal temporal proveniente de las fluctuaciones de presión que ocurren cuando un sonido voceado es pronunciado) [Sciamarella 1999].

Determinar cuándo dos espacios topológicos son equivalentes es un problema no trivial. Los pasos consisten basicamente en describir cómo pegar un conjunto de "bloques" (n-celdas) de modo tal de construir un conjunto equivalente a aquel en estudio [Kinsey 1993]. El primer paso en este programa consiste en identificar, para cada celda, sus caras. Esto se puede lograr mediante un mapa de borde **b**. El mismo de define de tal modo que, aplicado a una celda, retorna sus caras (una cadena de celdas de dimensión menor que la de la celda en una unidad). Una representación matricial de dicho mapa permite definir un conjunto de invariantes "escalonados". Entre ellos, los grupos de cadena, los cíclicos, y los de homología. Estos, son independientes de la descomposición particular empleada. Los pasos son algorítmicos y sencillos [Sciamarella 1999].

La importancia de variedades enramadas en la teoría de sistemas dinámicos se basa en la habilidad de los mismos para sostener una variedad de nudos complejos: una variedad enramada capaz de sostener órbitas periódicas inestables que coexistan con un atractor extraño ayuda a entender los mecanismos geométricos responsables por el comportamiento en estudio [Holmes 1985]. La variedad enramada de la Figura 1 es compatible con el estiramiento y dobles presentes en la suspensión de la herradura de Smale. Para la misma, una descomposición en celdas explícita es mostrada en la Figura 2. Basado en la misma, computamos su homología:

$$H0=Z1=[[P]]$$
$$H1=Z3=[[e+n,\ a-e+j+k,\ -b-c-d-e+g]]$$
$$H2=[[\Phi]].$$

Para llevar a cabo una aplicación de estas ideas al análisis de datos temporales, debemos pues obtener una representación multidimensional de la señal (embedding) [Abarbanel 1993]. Luego, tenemos que lograr aproximantes localmente euclídeos (a modo de parches), preservando las reglas de pegado necesarias para construir un complejo que aproxime a aquel en estudio. Así, uno básicamente necesita suficientes puntos que puedan ser centros de celdas (las cuales contendrán puntos vecinos a los centros), de modo que todo punto en el objeto en estudio esté comprendido en una celda. Para eso, elegimos arbitrariamente el primer punto, y ordenamos los demás de acuerdo con su distancia al mismo.

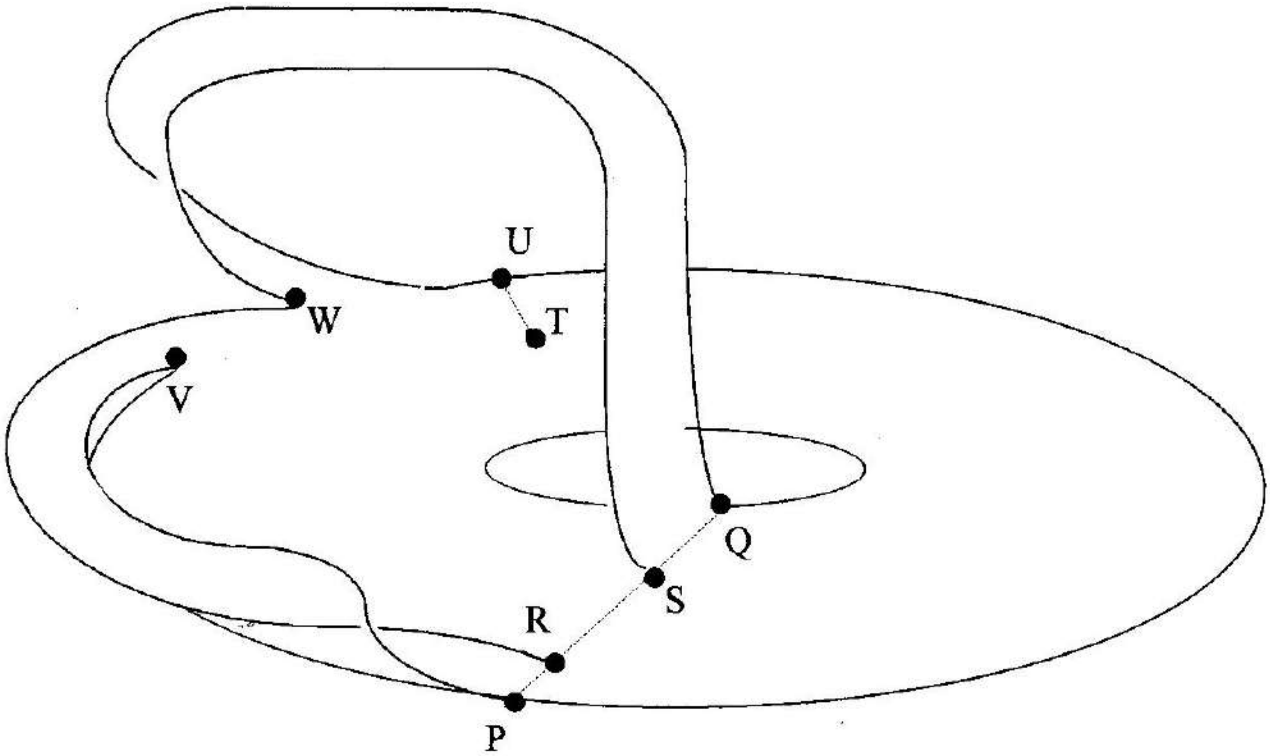

Fig. 1: Una variedad enramada sencilla, compatible con el estiramiento y doblez presentes en la herradura de Smale.

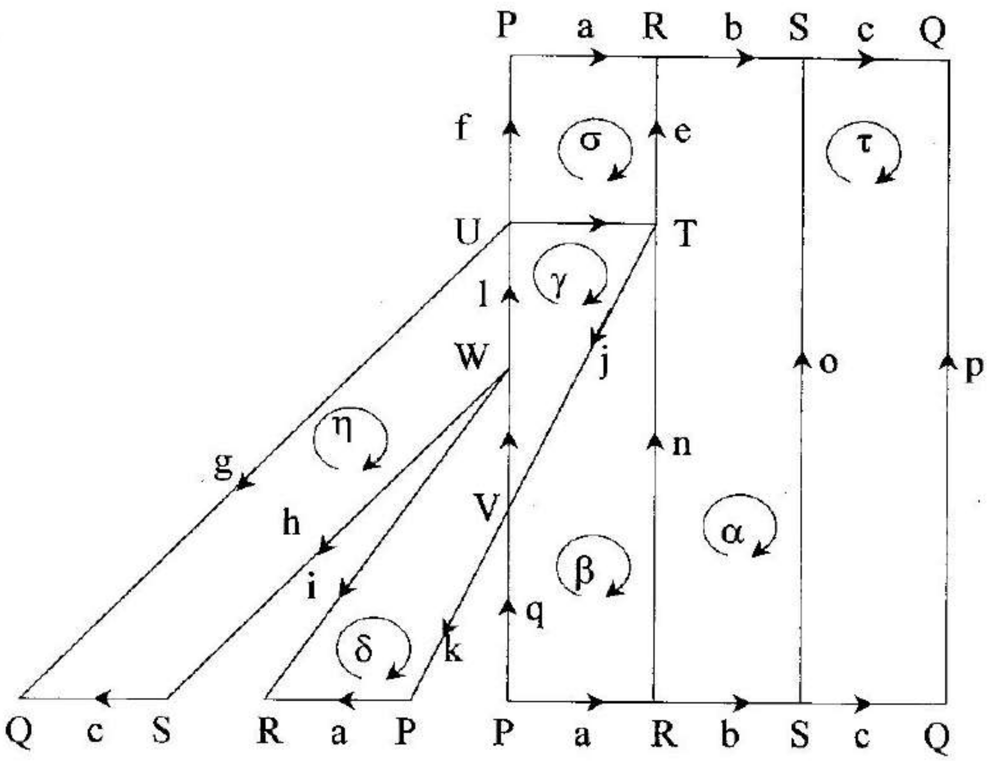

Fig. 2: Una descomposición en celdas de la variedad enramada mencionada antes.

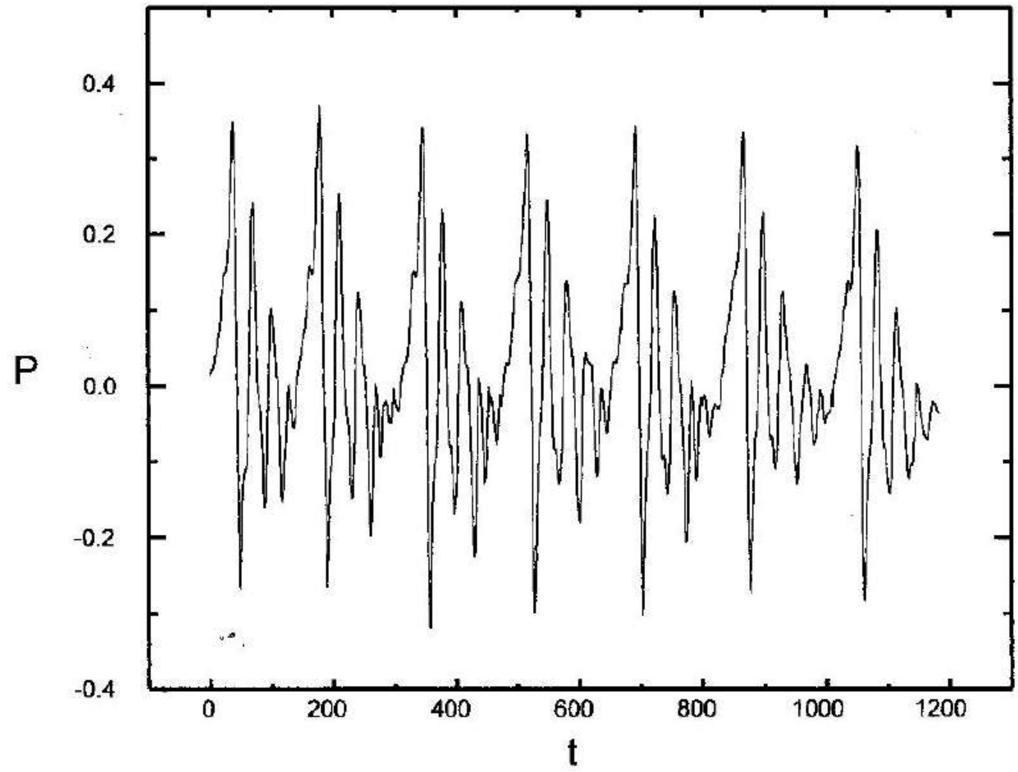

Fig. 3: La serie temporal de las fluctuaciones de presión (en unidades arbitrarias) en función de su posición en el archivo. Un tiempo total de 0.147 segundos son mostrados.

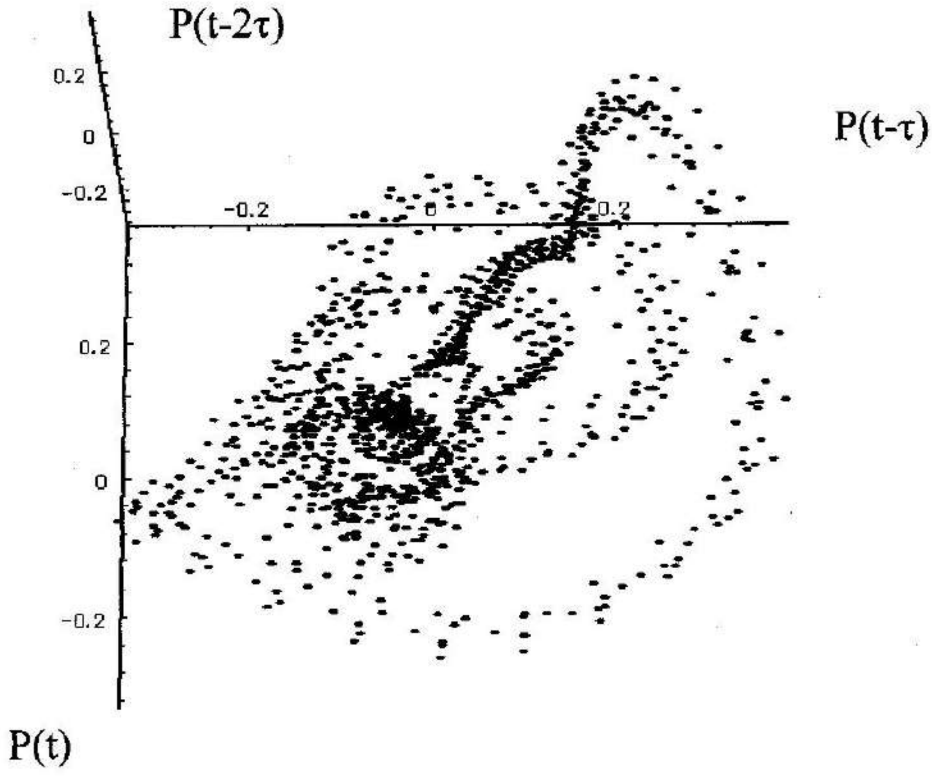

Fig. 4: Una reconstrucción tridimensional de la serie mostrada en la Figura 3.

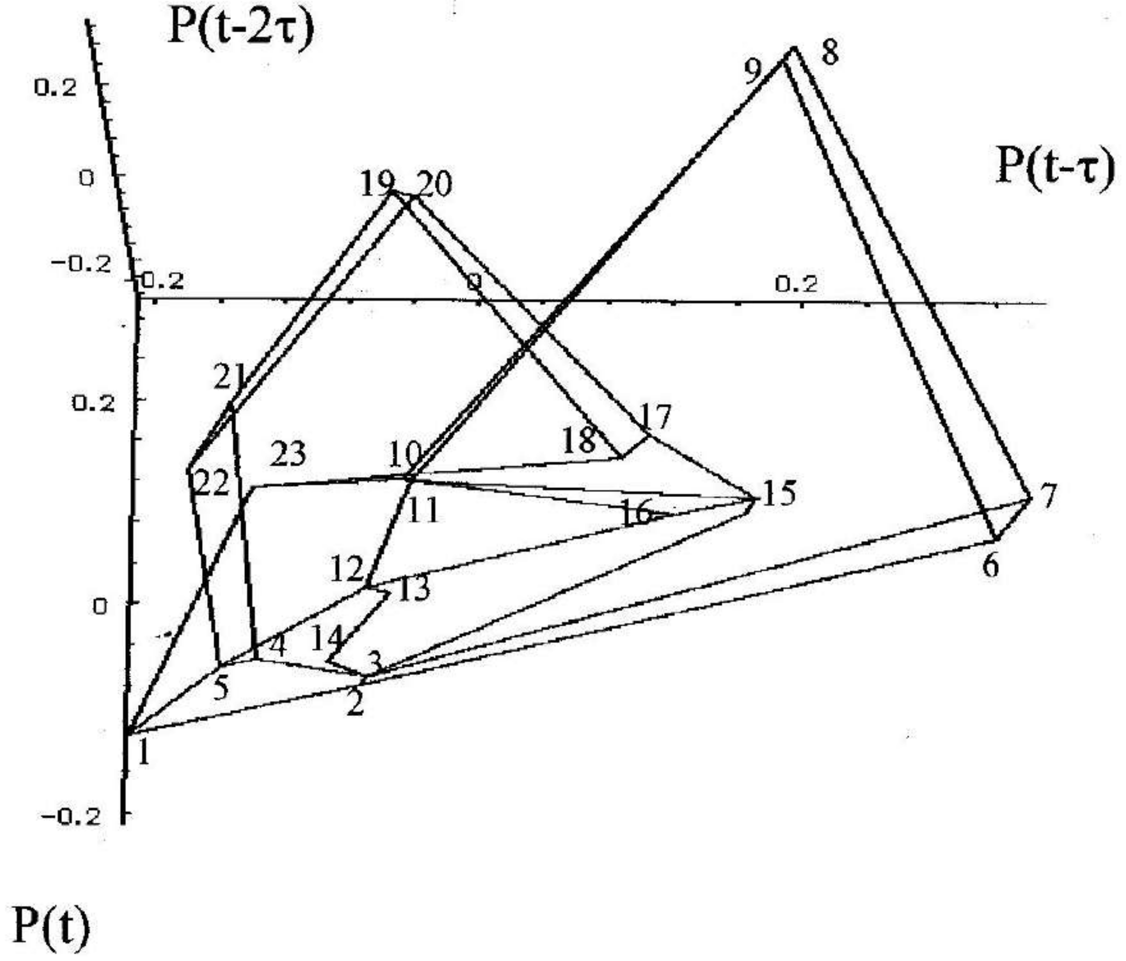

Fig. 5: El complejo aproximante al conjunto ilustrado en la Figura 4, de doce celdas apropiadamente pegadas.

Luego, elegimos un criterio para determinar el máximo radio tal que los puntos a distancias menores sean una aproximación euclídea razonable del entorno del punto elegido. A esos puntos los etiquetaremos con un índice que denotará la celda a la que pertenecen. Se toman luego sucesivos centros, lo más alejados posible de los centros ya elegido, y procedemos iterativamente. Así, tenemos que cada punto pertenecerá a por lo menos una celda. El resultado es una asignación, a cada punto, de un número de enteros que dan cuenta de a qué celdas pertenece. Una vez obtenida esta información, es posible construir los mapas de bordes, tomando puntos representativos de las intersecciones entre celdas [Sciamarella 1999]. El resto del procedimiento sigue los pasos algorítmicos citados antes.

El ejemplo con el que ilustramos estos pasos consiste en un registro de las fluctuaciones de presión que ocurren cuando se pronuncia una vocal voceada. El mecanismo físico es razonablemente claro: el aire a través de la glotis induce en las cuerdas vocales una oscilación de relajación, que resulta filtrada en el tracto vocal. En las Figuras 3 y 4 se muestran los datos a analizar y su reconstrucción en un ambiente multivaluado respectivamente. Corresponden a 0.14 segundos de registro de la vocal "a", pronunciada en el marco de la palabra "casa". Los 1183 puntos mostrados (muestreo de 8000 muestras por segundo) impiden siquiera esperar la posibilidad de reconstruir "órbitas periódicas", aún persuadidos de la posibilidad de encontrar una dinámica compleja de baja dimensión. El complejo aproximante, sin embargo, se muestra en la Figura 5. Sugestivamente, equivalente al teórico escrito anteriormente. Si bien la equivalencia entre este complejo y el de la variedad enramada de la Figura 1 no puede tomarse como una indicación de caoticidad, provee una descripción geométrica cuantificable capaz de jugar el papel de refutable ante eventuales soluciones de sistemas físicos propuestos.

En definitiva, la aproximación topológica al análisis de datos complejos (si bien determinísticos) apunta a construir cantidades a ser utilizadas en la refutación/validación de modelos. En este trabajo me propuse esbozar caminos para extender la línea de trabajo (más madura) que permite caracterizar atractores extraños en dimensión tres mediante una descripción de la organización topológica de las órbitas coexistentes con un atractor. El uso de homologías para describir variedades enramadas permite extender, cualitativamente, el rango de aplicabilidad de las técnicas existentes a dimensiones mayores que tres (o sea en dimensiones para las cuales los nudos se "desanudan"). Diversos caminos que no apuntan sino a recuperar, en el campo de lo impredecible, la posibilidad de la refutación.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Robert Gilmore y a H. G. Solari, quienes compartieron varios tramos del trabajo en el área de construcción de una estrategia topológica para el análisis de señales temporales, así como a Denisse Sciamarella, Darío Krmpotic, Marina Huerta y Manuel Eguía por su entusiasta y permanente apoyo. Un especial agradecimiento quisiera manifestar a la familia del ingeniero Ernesto Galloni por su continuo apoyo a la investigación.

Referencias

ABARBANEL 1996: H. D. I. Abarbanel, *Analysis of Observed Chaotic Data*, Springer (New York) 1993.

ABARBANEL 1993: H. D. Abarbanel, R. Brown, J. Sidorovich and L. Tsmirning, Review of Modern Physics 65, 1331 (1993).

MINDLIN 1990: G. B. Mindlin, H. G. Solari, R. Gilmore, X. Hou and N. Tufillaro, Physical Review Letters, 64, 2350 (1990).

MINDLIN 1991: G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore and X. Hou, Journal of Nonlinear Science 1, 147 (1991).

BIRMAN 1983: J. Birman and R. Williams, Cont. Math. 20, 1 (1983).

MULDOON 1993: J. Muldoon, R. S. MacKay, J. P. Huke and D. S. Bromhead, Physica D65 1 (1993).

SCIAMARELLA 1999: D. Sciamarella and G. B. Mindlin, Physical Review Letters, en prensa (1999).

KINSEY 1993: L. C. Kinsey, Topology of Surfaces, Springer (New York) (1993).

HOLMES 1985: P. Holmes and R. Williams, Arch. Rational Mech. Anal. 90, 115 (1985).

Manuscrito recibido en febrero de 1999.